2019考研高等数学赢在起点网络大点播

主讲：张帆

第一篇：极限的美好世界；

主要考点：1、极限的定义+性质

2、极限的计算

1）函数极限计算　　2）数列极限计算

3、无穷小比阶

4、闭区间连续函数性质+间断点类型

1）极限定义：同样的内容，完全不同的体会

1．设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，则当$n$充分大时，下列正确的有（　　）

（A）$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　　　（B）$|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$

（C）$a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　　　(D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

2）极限计算，体会大哥理论的精彩

.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2x-3}+2x+1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\ln(2-\cos x+\sin x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}+a[x]\right)=b.$　a=________,b=________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$=_____.

6、 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ____

7、 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}$

8、 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$

（15）（2017 数二、数三）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

（2014 年真题呈现） $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

（2010 年数 1）极限 $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$（　　）

（A） 1.　　（B） e.　　（C） e^{a-b}.　　（D） e^{b-a}.

二、无穷小量

1．无穷小量定义：若$\lim f(x)=0$，则称$f(x)$为无穷小（注：无穷小与x的变化过程有关，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，当$x\to\infty$时$\frac{1}{x}$为无穷小，而$x\to x_0$或其它时，$\frac{1}{x}$不是无穷小）

2．无穷大量定义：任给 M>0，当x变化一定以后，总有$|f(x)|>M$，则称$f(x)$为无穷大，记以$\lim f(x)=\infty$。

3．无穷小量与无穷大量的关系：在x的同一个变化过程中，

若$f(x)$为无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小量，

若$f(x)$为无穷小量，且$f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量。

4．无穷小量与极限的关系：

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim \alpha(x)=0$

5．两个无穷小量的比较

设$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，且$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=l$

（1）$l=0$，称$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小量，记以$f(x)=o[g(x)]$

称$g(x)$是比$f(x)$低阶的无穷小量

（2）$l\neq 0$，称$f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小量。

（3）$l=1$，称$f(x)$与$g(x)$是等阶无穷小量，记以$f(x)\sim g(x)$

6．常见的等价无穷小量，当$x\to 0$时

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$arc\sin x\sim x$，$arc\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$，

$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$。

7．无穷小量的重要性质

有界变量乘无穷小量仍是无穷小量。

无穷小阶的比较

1． 设当$x\to 0$时，$f(x)=e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$为$x$的3阶无穷小，则$a=$_____，$b=$______.

2. .当$x \to 0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则（　　）

A a=1,　b=-$\frac{1}{6}$　　　　B a=1,　b=$\frac{1}{6}$

C a=-1,　b=-$\frac{1}{6}$　　　　D a=-1,　b=$\frac{1}{6}$

3. （2014 数三）设$P(\mathrm{x})=\mathrm{a}+bx+cx^2+dx^3$，当$x \to 0$ 时，若$P(\mathrm{x})-\tan\mathrm{x}$ 是比x^3高阶的无穷小，则下列试题中错误的是

（A）$a=0$　（B）$b=1$　（C）$c=0$　（D）$d=\frac{1}{6}$

4. 设$f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt, g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$,则当$x \to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的(　　)

A 低阶无穷小　　B 高阶无穷小

C等阶无穷小　　D 同阶但非等价无穷小

5. 把$x \to 0^+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x\cos t^2dt, \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt, \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$排列起来，使排在后面的事前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

A α,β,γ.　B α,γ,β.　C β,α,γ.　D β,γ,α.

（ 2015年真题体现）（数学一、数学二、数三）

(15)(本题满分 10 分) 设函数 $f\left(x\right)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

四、用夹逼定理求数列极限

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$

解：$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+2)}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}$

（16）（2017 数一、数二、数三）（本题满分 10 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$

【答案】$\frac{1}{4}$

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于

（A）$\int_1^2\ln^2 xdx$.　　　　（B）$2\int_1^2\ln xdx$.

（C）$2\int_1^2\ln(1+x)dx$.　　　　（D）$\int_1^2\ln^2(1+x)dx$